Akademie věd České republiky
Ústav teorie informace a automatizace

Academy of Sciences of the Czech Republic
Institute of Information Theory and Automation

RESEARCH REPORT

Jiří Michálek, Miroslav Šiman:

Vyhodnocování markovských řetězců pomocí funkce $MR \cdot m$ v Matlabu

No. 2288 Listopad 2010

ÚTIA AV ČR, P. O. Box 18, 182 08 Prague, Czech Republic
E-mail: utia@utia.cas.cz

Tato výzkumná zpráva bezprostředně navazuje na VZ No. 2277, kde je sestrojen a vysvětlen jednoduchý matematický model kontrolního stanoviště na konci výrobní linky, kterým prochází každý výrobek na lince sestavený. Na kontrolním stanovišti se provádí řada testů a případné opravy, když výrobek některým testem neprojde. Model je založen na použití markovských a semimarkovských řetězců. Veličinami, které vstupují do semimarkovského řetězce, může být jednak čas strávený v jednotlivých stavech řetězce a též ohodnocení nákladů na provádění testů a oprav.

Základní markovský řetězec se skládá ze stavů T (test), OK (výrobek vyhovuje), R_1, $R_2, \ldots$ (jednotlivé stavy postupných oprav) a případně lze uvažovat stav S (zmetek). Teoreticky lze uvažovat i nekonečný počet následných oprav, protože nemusí být dopředu počet oprav omezen, výrobek se opravuje tak dlouho, dokud není v pořádku. Funkce $MR \cdot m$ ale vždy pracuje pouze s konečným počtem oprav a se stavem S.

Markovský řetězec je pak definován maticí přechodu, jejíž prvky lze samozřejmě ve funkci $RM \cdot m$ volit podle potřeby. Matice přechodu by měla vycházet z konkrétních měření, na základě nichž jsou jednotlivé pravděpodobnosti přechodu odhadnuty pomocí odpovídajících relativních četností.

Po zadání časů strávených v jednotlivých stavech, např. přechodu, je nutno zadat dobu τ_T trvání testu, dobu τ_{OK} nutnou pro vyřízení shodného výrobku, dále doby $\tau_{R_1}, \tau_{R_2}, \ldots, \tau_{R_k}$ jednotlivých oprav a dobu τ_S pro vyřízení neshodného výrobku.

Následující tabulka dává složení jednotlivých dob přechodu.

$$
\begin{array}{ll}
T \to OK & \tau_t + \tau_{OK} \\
T \to R & \tau_T + \tau_R \\
OK \to T & \tau_M \\
R_1 \to OK & \tau_T + \tau_{OK} \\
R_1 \to R_2 & \tau_T + \tau_{R_2} \\
R_2 \to OK & \tau_T + \tau_{OK} \\
R_2 \to R_3 & \tau_T + \tau_{R_3} \\
R_3 \to S & \tau_T + \tau_S \\
\vdots & \vdots \\
R_i \to R_{i+1} & \tau_T + \tau_{R_{i+1}} \\
R_{i+1} \to OK & \tau_T + \tau_{OK} \\
R_{i+1} \to S & \tau_T + \tau_S \\
\vdots & \vdots \\
S \to T & \tau_M
\end{array}
$$

Doba τ_M odpovídá manipulaci s dalším výrobkem připravovaným na test. Hodnoty jednotlivých dat mohou představovat jednak náhodné časy vygenerované z příslušných rozdělení pravděpodobnosti, a jednak průměrné časy (střední doby) strávené v jednotlivých stavech a přechodech. Tím lze si udělat představu o možné trajektorii průchodu výrobku kontrolním stanovištěm či představu o průměrné době strávené jedním výrobkem na kontrolním stanovišti.

Pomocí funkce $MR \cdot m$ lze snadno vypočítat nejdůležitější číselné charakteristiky, které vyjadřují a dávají informaci o průběhu na kontrolním stanovišti.

Kontrola výrobků na stanovišti probíhá v základních cyklech, které znamenají rozložení na jednotlivé průchody stavem T. Základní cyklus je tedy $(T \to T)$, což je první návrat do stavu T, když jsme ze stavu T vyšli. Průměrná doba cyklu předtavuje vlastně průměrnou dobu na zkontrolování a vyřízení jednoho výrobku a přípravu na otestování dalšího. Každý následující cyklus $(T \to T)$ je pravděpodobnostní replikou předcházejícího cyklu, pokud není mezi nimi proveden nějaký zásah do montážního procesu, což obvykle vyvolá změny ve vstupních parametrech. Zajímá nás tedy střední doba cyklu $(T \to T)$, protože její hodnota vyjadřuje frekvenci kontrolního stanoviště v počtu zkontrolovaných výrobků za jednotku času (např. za hodinu, směnu apod.). Toto číslo je velice důležité, protože může být srovnáno s frekvencí montážní linky a lze pak snadno posoudit, zdali jsou výrobky přicházející z výrobní linky průchozí snadno či hůře kontrolním stanovištěm. Jestliže by doba trvání jednoho cyklu $(T \to T)$ se dala popsat exponenciálním rozdělením, pak lze průchody stavem T popsat Poissonovým procesem s týmž parametrem. Vzniká tedy otázka, kdy tato možnost nastane.

Rovněž důležitá informace je o délce střední doby trvání cyklu $(OK \to OK)$, což je průměrná doba 1. návratu do stavu OK, když se vyšlo ze stavu OK. Její převrácená hodnota se vztahuje k frekvenci výskytu shodných kusů ve výrobním procesu. Zcela analogicky může být i zajímavá průměrná délka doby mezi dvěma stavy S, což opět nese informaci o výskytu neshodných kusů ve výrobě.

Pokud bychom navíc zavedli váhy pro jednotlivé stavy a přechody mezi nimi, které by vyjadřovaly výši nákladů na provádění testů, oprav a řízení shodného a neshodného výrobku, můžeme např. získat informaci, kolik by byl celkový náklad na jeden cyklus $(T \to T)$. Bylo by možno hledat výhodnější řešení pro snížení nákladů např. snížením průměrné doby jednoho cyklu či nalezením optimálního (tedy únosného ekonomicky) průměrného počtu oprav a výrobky, které by tímto počtem oprav neprošly, by automaticky přecházely do stavu S, tedy mezi zmetky. K tomu je nutno ještě znát náklady na likvidaci jednoho zmetku, aby se mohly porovnávat celkové náklady na jeden cyklus.

Rovněž může být zajímavé, zdali by bylo možno cyklus $OK \to OK$ či $S \to S$ charakterizovat jeho délkou mající exponenciální rozdělení, a tím by se dal výskyt stavu OK či stavu S popsat homogenním Poissonovým procesem.

Popis funkce $MR \cdot m$

V programech MATLAB a OCTAVE lze tuto funkci s hlavičkou

$$\text{OutST} = \text{MR(InST)}$$

použít k analýze zadaného markovského řetězce.

Vstupní parametry

Funkce MR má jediný vstupní parametr a tím je struktura *InST*. U té mají význam následující pole:

PPMat s maticí pravděpodobností přechodu. Musí to být čtvercová stochastická matice s r řádky, $2 \leq r \leq 49$.

PRCol ($[1, 0, \ldots, 0]'$) s vektorem počátečního rozdělení. Musí to být stochastický sloupcový $r \times 1$ vektor.

ZMat (matice samých jedniček) s maticí ocenění přechodů. Musí to být čtvercová $r \times r$ matice.

Beta (1) s reálným diskontním faktorem z intervalu [0,1].

CensVec ($[1, \ldots, r-1]'$) s podvektorem stavů pro definici censorovaného řetězce. Musí to být vektor délky nejvýše r obsahující každé z čísel $1, \ldots, r$ nejvýše jednou.

OFileName (") s cestou (znakovým polem) k budoucímu výstupnímu souboru. Pokud inicializace tohoto souboru není úspěšná, vypíše se výsledek na obrazovku.

NPPN (max(r,5)) s maximálním řádem pro výpočet pravděpodobností přechodu a absolutních pravděpodobností. Musí to být nezáporné celé číslo menší než 100.

NFFN (max(r,5)) s maximální hodnotou doby prvního návratu pro výpočet rozdělení této doby. Musí to být nezáporné celé číslo menší než 100.

MaxNV (max(r,5)) maximální počet období uvažovaných při počítání výnosů. Musí to být nezáporné celé číslo menší než 1000.

Matice pravděpodobností přechodu musí být zadána vždy. Pokud ostatní parametry zadány nejsou, použijí se jejich předdefinované hodnoty uvedené v závorkách. Případná další pole vstupní struktury *InST* nejsou brána v potaz.

Výstupní parametry

Výstupem z funkce MR je struktura *OutST*, která vždy obsahuje pole PPMat, PRCol, ZMat, Beta, CensVec, OFileName, NPPN, NFFN a MaxNV použitá při výpočtu a případně i některá další:

PPNA : trojrozměrné numerické pole, jehož prvek PPNA(i,j,n) obsahuje pravděpodobnost přechodu ze stavu i do stavu j za dobu n. Speciálně, PPNA(:,:,1) = PPMat.

AbsPNMat : matice, jejíž prvek AbsPNMat(n,i) obsahuje absolutní pravděpodobnost výskytu řetězce ve stavu i v čase n

FFNA trojrozměrné numerické pole, jehož prvek FFNA(i,j,n) vyjadřuje pravděpodobnost, že se řetězec z počátečního stavu i poprvé dostane do stavu j právě po n krocích. Speciálně, FFNA(:,:,1) = PPMat.

IncMat logické pole, jehož prvek IncMat(i,j) je roven jedné, právě když je stav j dosažitelný ze stavu i po alespoň jednom kroku

PermCVec sloupcový vektor všech uzavřených stavů

PermOVec sloupcový vektor všech otevřených stavů

NCVec sloupcový vektor s počty stavů v jednotlivých uzavřených komunikačních třídách (takže první uzavřená komunikační třída obsahuje prvních NCVec(1) stavů z PermCVec), případná druhá uzavřená komunikační třída obsahuje dalších NCVec(2) stavů z PermCVec atd.

NOVec sloupcový vektor s počty stavů v jednotlivých otevřených komunikačních třídách a s analogickou interpretací jako NCVec

PerCVec sloupcový vektor s periodami odpovídajícími jednotlivým uzavřeným komunikačním třídám

PerOVec sloupcový vektor s periodami odpovídajícími jednotlivým otevřeným komunikačním třídám

CanPermVec sloupcový permutační vektor vedoucí ke kanonickému tvaru matice pravděpodobností přechodu

CanPPMat kanonický tvar matice pravděpodobností přechodu

CanPRCol sloupcový vektor počátečního rozdělení zpermutovaný podle CanPermVec

IsIrreducible indikátor toho, jestli je řetězec nerozložitelný

IsAperiodic indikátor toho, jestli je řetězec nerozložitelný aperiodický

PiVec sloupcový vektor stacionárního rozdělení

MuVec sloupcový vektor středních dob prvního návratu

SPNMat matice, jejíž prvek SPNMat(i,j) vyjadřuje střední počet návštěv stavu j mezi dvěma po sobě následujícími průchody stavem i

PPCensMat matice pravděpodobností přechodu censorovaného řetězce

MuCensVec sloupcový vektor středních dob prvního návratu censorovaného řetězce

PiCensVec sloupcový vektor stacionárního rozdělení censorovaného řetězce

SPNCensMat matice, jejíž prvek SPNCensMat(i,j) vyjadřuje střední počet návštěv censorovaného řetězce ve stavu CensVec(j) mezi dvěma po sobě následujícími průchody stavem CensVec(i)

FMat fundamentální matice řetězce, jejíž prvek FMat(i,j) vyjadřuje střední počet časových okamžiků strávených v otevřeném stavu PermOVec(j) při startu řetězce z otevřeného stavu PermOVec(i)

UMat matice absorpčních pravděpodobností, jejíž prvek UMat(i,j) vyjadřuje pravděpodobnost, že řetězec startující z otevřeného stavu PermOVec(i) bude absorbován stavem PermCVec(j) do množiny stavů trvalých

EiWVec sloupcový vektor, jehož prvek EiWVec(i) vyjadřuje podmíněný střední počet časových okamžiků strávených v množině přechodných stavů při startu řetězce ze stavu PermOVec(i)

W absolutní střední počet časových okamžiků strávených v množině přechodných stavů

PSVMat matice, jejíž prvek PSVMat(n,i) odpovídá podmíněnému střednímu výnosu za n období při startu řetězce ze stavu i

ASVVec sloupcový vektor, jehož prvek ASVVec(n) odpovídá absolutnímu střednímu výnosu za n období

AVec, BVec pomocné vektory takové, že AVec(i)*n + BVec(i) aproximuje podmíněný střední výnos za n období (pro velké n) při startu řetězce ze stavu i

A, B skaláry takové, že A*n+B aproximuje absolutní střední výnos za n období (pro velké n)

CVec vektor, jehož i-tá složka aproximuje podmíněný střední výnos za n období (pro velké n) při startu řetězce ze stavu i

C skalár, který aproximuje absolutní střední výnos za n období (pro velké n)

Přítomnost některých polí ve výsledné struktuře *OutST* závisí na povaze zadaného markovského řetězce. Například PiVec, SPNMat, a MuVec se počítají jen v případě nerozložitelného markovského řetězce, FMat, UMat, EiWVec a

W se počítají jen pro řetězce s alespoň jedním stavem přechodným, AVec, BVec, A a B se ve výstupu objeví pouze v případě nerozložitelného řetězce a jednotkového diskontního faktoru a CVec spolu s C se počítá pro nerozložitelné řetězce s diskontním faktorem z intervalu $(0, 1)$.

Příklad použití:
InST.PPMat = [0.2 0.2 0.6; 0.1 0.8 0.1; 0.3 0.3 0.4];
InST.PRCol = [0.5; 0.4; 0.1];
InST.ZMat = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
InST.Beta = 0.9;
InST.CensVec = [1; 2];
InST.OFileName = 'MRVystup.txt';
InST.NPPN = 3;
InST.NFFN = 2;
InST.MaxNV = 10;
OutST = MR(InST);

Použití funkce $MR \cdot m$ na konkrétním příkladě

Konstrukce matice přechodu pro markovský řetězec vychází z konkrétních dat získaných z reálné výrobní montážní linky, kde se provádí montáž ventilů pro plynové bomby. Pro jednoduchost byly uvažovány pouze 3 možné po sobě jdoucí opravy R_1, R_2 a R_3, i když v praxi bylo uvažováno až 10 možných oprav. Tyto opravy byly zahrnuty do stavu S, který rovněž v praxi není uvažován, neboť je snaha opravit všechny smontované ventily přicházející z linky.

Matice přechodu má následující tvar:

	T	OK	R_1	R_2	R_3	S
T	0	0,6	0,4	0	0	0
OK	1	0	0	0	0	0
R_1	0	0,6	0	0,4	0	0
R_2	0	0,6	0	0	0,4	0
R_3	0	0,4	0	0	0	0,6
S	1	0	0	0	0	0

Pomocí funkce $MR{\cdot}m$ lze zjistit, že existuje pouze jediná uzavřená množina stavů obsahující všechny stavy s periodou 1. Dále je dokázána existence stacionárního rozdělení, které má složky pravděpodobnosti

$$\{0,3811;\ 0,3665;\ 0,1524;\ 0,0610;\ 0,0244;\ 0,0146\}$$

příslušející stavům T, OK, R_1, R_2, R_3, S. Toto rozdělení je určeno jednoznačně.

Samozřejmě zajímavým výsledkem je střední doba 1. návratu z jistého stavu do téhož stavu. Zde je tato délka návratu vyjádřená v počtu přechodů.

Střední doba 1. návratu v počtu přechodů

$T \to T$	2,6240
$OK \to OK$	2,7288
$R_1 \to R_1$	6,5600
$R_2 \to R_2$	16,4000
$R_3 \to R_3$	41,0000
$S \to S$	68,3333

Pokud se soustředíme na důležitý podřetězec $\{OK, S\}$, pak odpovídající matice přechodu má tvar

	OK	S
OK	0,9616	0,0384
S	0,9616	0,0384

a střední doby 1. návratu v rámci tohoto podřetězce jsou

$$\begin{array}{ll} OK \to OK & 1{,}0399 \\ S \to S & 26{,}0417 \end{array}$$

počítáno opět v počtu přechodů v tomto podřetězci.

Semimarkovský řetězec je navíc kromě výše uvedené matice přechodu ještě určen maticí ocenění přechodů, zde cenou byla doba v průměru strávená při jednotlivých přechodech. Tyto průměrné doby byly získány na základě rozkladu na jednotlivé operace prováděné při přechodu z jednoho stavu do druhého. Průměrné doby jsou míněny v minutách, neodpovídají reálné situaci na montážní lince, neboť skutečné časy jednotlivých operací nebyly dány k dispozici s reálnými daty.

Matice ocenění dob přechodů

	T	OK	R_1	R_2	R_3	S
R	0	1,08	1,25	0	0	0
OK	0,25	0	0	0	0	0
R_1	0	1,08	0	1,35	0	0
R_2	0	1,08	0	0	1,45	0
R_2	0	1,08	0	0	0	1,15
S	0,25	0	0	0	0	0

Diskontní faktor β zde byl samozřejmě nastaven na hodnotu $\beta = 1$.

Matice ocenění byla získána na základě složení jednotlivých dob přechodu následovně:

$$\begin{array}{lll}
T \to OK & \tau_T + \tau_{OK} & 0,75 + 0,33 = 1,08 \\
T \to R_1 & \tau_T + \tau_{R_1} & 0,75 + 0,50 = 1,25 \\
OK \to T & \tau_M & 0,25 \\
R_1 \to OK & \tau_T + \tau_{OK} & 0,75 + 0,33 = 1,08 \\
R_1 \to R_2 & \tau_T + \tau_{R_2} & 0,75 + 0,60 = 1,35 \\
R_2 \to OK & \tau_T + \tau_{OK} & 0,75 + 0,33 = 1,08 \\
R_2 \to R_3 & \tau_T + \tau_{OK} & 0,75 + 0,70 = 1,45 \\
R_3 \to OK & \tau_T + \tau_{OK} & 0,75 + 0,33 = 1,08 \\
R_3 \to S & \tau_T + \tau_S & 0,75 + 0,40 = 1,15 \\
S \to T & \tau_M & 0,25
\end{array}$$

Doby τ_T, τ_{OK}, τ_{R_1}, τ_{R_2} a τ_S odpovídají průměrným dobám stráveným v jednotlivých stavech. Doba τ_M je doba pro vyřízení shodného či neshodného výrobku (doba manipulační).

S pomocí matice ocenění pomocí průměrných časů strávených při jednotlivých přechodech lze s pomocí funkce $MR{\cdot}m$ stanovit střední doby pro určený počet přechodů, když vycházíme ze stavu T. Pak v průměru 1. přechod trvá 1,1480 minut, dva přechody trvají 1,7752 minut, 3 přechody trvají 2,7185 minut. Limitně lze říci, že n přechodů pak trvá $An + B$ minut, kde

$$A = 0,8161, \qquad B = 0,2211$$

při startu ze stavu T, což je vždycky počáteční stav, kde proces kontroly ventilu začíná. Takže např. v průměru prvních 10 přechodů ze stavu T na začátku trvá 8,3835 minut.

Samozřejmě nás zajímá průměrná doba potřebná pro absolvování jednoho cyklu řetězce $T \to T$, neboť vývoj celého kontrolního procesu pomocí tohoto modelu se odehrává v cyklech, řetězec má renegerativní charakter. Protože víme, že přechod z $T \to T$ trvá 2,6240 počtu přechodů a na jeden přechod je zapotřebí v průměru (při startu ze stavu T) 0,8161 minut, pak průměrná doba 1 cyklu je

$$0,8161 \times 2,6240 = 2,1414 \text{ minut.}$$

Během 1 cyklu je vyřízen jeden výrobek, a to buď se jedná o shodný kus nebo neshodný kus označený jako zmetek. Z toho plyne, že za 1hodinu je při tomto nastavení časů kontrola schopna ošetřit v průměru

$$60 : 2,1414 \doteq 28 \text{ výrobků.}$$

toto číslo charakterizuje průměrnou propustnost kontrolního stanoviště, což je velice důležitý údaj, který úzce souvisí s kapacitou montážní linky. Pokud totiž průměrný počet smontovaných ventilů na lince za 1 hodinu bude větší nežli propustnost kontrolního stanoviště, pak toto stanoviště bude postupně zahlceno a nebude stíhat provádění kontroly smontovaných ventilů.

Základní matici přechodů lze účelově modifikovat, aby nejdůležitější stavy OK a S byly absorbční. Pak matice přechodů má tvar:

	T	OK	R_1	R_2	R_3	S
T	0	0,6	0,4	0	0	0
OK	0	1	0	0	0	0
R_1	0	0,6	0	0,4	0	0
R_2	0	0,6	0	0	0,4	0
R_3	0	0,4	0	0	0	0,6
S	0	0	0	0	0	1

Je tedy nutno pozměnit i matici ocenění přechodů průměrnými časy následovně:

	T	OK	R_1	R_2	R_3	S
T	0	1,08	1,25	0	0	0
OK	0	0	0	0	0	0
R_1	0	1,08	0	1,35	0	0
R_2	0	1,08	0	0	1,45	0
R_3	0	1,08	0	0	0	1,15
S	0	0	0	0	0	1

V tomto případě se řetězec rozpadá na dvě uzavřené třídy, a to $\{0K\}$ a $\{S\}$ a 4 otevřené třídy $\{T\}, \{R_1\}, \{R_2\}$ a $\{R_3\}$. Stavy T, R_1, R_2 a R_3 jsou přechodnými stavy řetězce.

Rozhodující informace o délce cyklu $(T \to T)$ je dána absolutními středními výnosy za prvních n období při počátečním rozdělení, které je dáno vždy startem ze stavu T. Z tabulky je vidět, že po 4 obdobích se dostává řetězec do některého z absorbčních stavů, a to za dobu 1,8915 minut. Jestliže k tomu přičteme dobu nutnou pro vyřízení buď shodného výrobku či neshodného, tedy dobu $\tau_M = 0,25$, pak dojdeme k průměrné době jednoho cyklu $(T \to T)$, a to 2,1415, což se shoduje s již dříve vypočtenou průměrnou délkou jednoho cyklu na základě řetězce bez absorbčních stavů OK a S.

Pokud nás bude zajímat průměrný počet shodných výrobků za určitou dobu (např. 1 hodinu) či počet zmetků, pak využijeme průměrnou dobu 1. návratu ze stavu OK do stavu OK či ze stavu S do stavu S. Tyto průměrné doby jsou 2,7288 a 68,3333 vyjádřené v počtu přechodů. Protože jeden přechod v průměru trvá 0,8161 minuty, pak jeden shodný výrobek vyjde z kontrolního stanoviště za dobu $2,7288 \times 0,8161 = 2,2270$ a jeden zmetek se objeví v průměru za $68,3333 \times 0,8161 = 55,7668$ minut. To znamená, že produkce shodných výrobků je přibližně 27 kusů za hodinu a přibližně 1 neshodný kus za tutéž dobu.

Reference

[1] J. M. Ross: Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisco, 1970

[2] J. Michálek: Matematický model kontrolního stanoviště montážní linky, VZ ÚTIA č. 2277, březen 2010

PŚílohy

Výstupy z funkce MR.m

Příloha A: Markovský řetězec bez absorpčních stavů

Příloha B: Markovský řetězec s absorpčními stavy OK a S

```
------------
Zadani ulohy
------------

Matice pravdepodobnosti prechodu PPMat s radky:

   ss    1     [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    2     [      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3     [      0.0000      0.6000      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000 ]
   ss    4     [      0.0000      0.6000      0.0000      0.0000      0.4000      0.0000 ]
   ss    5     [      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000      0.6000 ]
   ss    6     [      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]

Vektor pocatecniho rozdeleni PRCol:

   PRCol =     [      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]

Matice oceneni prechodu ZMat s radky:

   ss    1     [      0.0000      1.0800      1.2500      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    2     [      0.2500      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3     [      0.0000      1.0800      0.0000      1.3500      0.0000      0.0000 ]
   ss    4     [      0.0000      1.0800      0.0000      0.0000      1.4500      0.0000 ]
   ss    5     [      0.0000      1.0800      0.0000      0.0000      0.0000      1.1500 ]
   ss    6     [      0.2500      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]

Diskontni faktor Beta:

   Beta =      [      1.0000 ]

Vektor CensVec stavu censorovaneho retezce:

   CensVec  =  [   2   6 ]

Maximalni rad pocitanych pravdepodobnosti:

   NPPN     =  [   4 ]

Maximalni uvazovana hodnota doby prvniho navratu:

   NFFN     =  [   4 ]

Maximalni pocet obdobi uvazovany pri pocitani vynosu:

   MaxNV    =  [  10 ]

Vystup: do souboru MRWithRenewal_Output.txt



--------------------------------------
Pravdepodobnosti prechodu vyssich radu
--------------------------------------

Matice pravdepodobnosti prechodu radu 2:

   ss    1     [      0.6000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   ss    2     [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3     [      0.6000      0.2400      0.0000      0.0000      0.1600      0.0000 ]
   ss    4     [      0.6000      0.1600      0.0000      0.0000      0.0000      0.2400 ]
   ss    5     [      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    6     [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]

Matice pravdepodobnosti prechodu radu 3:

   ss    1     [      0.2400      0.4560      0.2400      0.0000      0.0640      0.0000 ]
   ss    2     [      0.6000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   ss    3     [      0.2400      0.4240      0.2400      0.0000      0.0000      0.0960 ]
   ss    4     [      0.4000      0.3600      0.2400      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    5     [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    6     [      0.6000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]

Matice pravdepodobnosti prechodu radu 4:
```

```
   ss    1     [      0.4560      0.3136      0.0960      0.0960      0.0000      0.0384 ]
   ss    2     [      0.2400      0.4560      0.2400      0.0000      0.0640      0.0000 ]
   ss    3     [      0.5200      0.2880      0.0960      0.0960      0.0000      0.0000 ]
   ss    4     [      0.3600      0.3840      0.1600      0.0960      0.0000      0.0000 ]
   ss    5     [      0.6000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   ss    6     [      0.2400      0.4560      0.2400      0.0000      0.0640      0.0000 ]

---------------------------------------
Absolutni pravdepodobnosti vyssich radu
---------------------------------------

Absolutni pravdepodobnosti radu n < 5:

   n =   1     [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   n =   2     [      0.6000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   n =   3     [      0.2400      0.4560      0.2400      0.0000      0.0640      0.0000 ]
   n =   4     [      0.4560      0.3136      0.0960      0.0960      0.0000      0.0384 ]

------------------------------
Rozdeleni doby prvniho navratu
------------------------------

Podminene pravdepodobnosti prvniho navratu za dobu 2:

   ss    1     [      0.6000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   ss    2     [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3     [      0.6000      0.2400      0.0000      0.0000      0.1600      0.0000 ]
   ss    4     [      0.6000      0.1600      0.0000      0.0000      0.0000      0.2400 ]
   ss    5     [      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    6     [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]

Podminene pravdepodobnosti prvniho navratu za dobu 3:

   ss    1     [      0.2400      0.0960      0.2400      0.0000      0.0640      0.0000 ]
   ss    2     [      0.0000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   ss    3     [      0.2400      0.0640      0.2400      0.0000      0.0000      0.0960 ]
   ss    4     [      0.4000      0.0000      0.2400      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    5     [      0.0000      0.3600      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    6     [      0.0000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]

Podminene pravdepodobnosti prvniho navratu za dobu 4:

   ss    1     [      0.0960      0.0256      0.0000      0.0960      0.0000      0.0384 ]
   ss    2     [      0.0000      0.0960      0.2400      0.0000      0.0640      0.0000 ]
   ss    3     [      0.1600      0.0000      0.0960      0.0960      0.0000      0.0000 ]
   ss    4     [      0.0000      0.1440      0.1600      0.0960      0.0000      0.0000 ]
   ss    5     [      0.0000      0.1440      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   ss    6     [      0.0000      0.0960      0.2400      0.0000      0.0640      0.0000 ]

-----------------
Klasifikace stavu
-----------------

Mnozina stavu daneho markovskeho retezce obsahuje nasledujici komunikacni tridy:

   Uzavrena ( pocet stavu   6 s periodou   1 ) : [   1   2   3   4   5   6 ]

takze pocet uzavrenych (resp. otevrenych) trid je 1 (resp. 0).
Kazdy stav lezi v nektere z techto trid.

Pro permutaci stavu:

                [   1   2   3   4   5   6 ]

tak ziskame kanonicky tvar matice pravdepodobnosti prechodu s radky:

   ss    1     [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    2     [      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3     [      0.0000      0.6000      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000 ]
   ss    4     [      0.0000      0.6000      0.0000      0.0000      0.4000      0.0000 ]
   ss    5     [      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000      0.6000 ]
   ss    6     [      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]

---------------------
```

Stacionarni rozdeleni

Stacionarni rozdeleni PiVec daneho retezce existuje a je urceno jednoznacne:

```
   PiVec =      [      0.3811      0.3665      0.1524      0.0610      0.0244      0.0146 ]
```

Melo by odpovidat prvnimu radku matice pravdepodobnosti prechodu n-teho radu pro velke n.
Pro n= 2^i, i= 1,...,7, jsou tyto radky rovny

```
   i =   1 :    [      0.6000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   i =   2 :    [      0.4560      0.3136      0.0960      0.0960      0.0000      0.0384 ]
   i =   3 :    [      0.3769      0.3680      0.1528      0.0622      0.0225      0.0175 ]
   i =   4 :    [      0.3811      0.3665      0.1525      0.0609      0.0244      0.0146 ]
   i =   5 :    [      0.3811      0.3665      0.1524      0.0610      0.0244      0.0146 ]
   i =   6 :    [      0.3811      0.3665      0.1524      0.0610      0.0244      0.0146 ]
   i =   7 :    [      0.3811      0.3665      0.1524      0.0610      0.0244      0.0146 ]
```

Vektor MuVec strednich dob prvniho navratu do jednotlivych stavu ma tvar:

```
   MuVec =      [      2.6240      2.7288      6.5600     16.4000     41.0000     68.3333 ]
```

a stredni pocet navstev sloupcoveho stavu mezi dvema bezprostredne nasledujicimi pruchody radkovym stavem lze vycist z matice:

```
   ss    1      [      1.0000      0.9616      0.4000      0.1600      0.0640      0.0384 ]
   ss    2      [      1.0399      1.0000      0.4160      0.1664      0.0666      0.0399 ]
   ss    3      [      2.5000      2.4040      1.0000      0.4000      0.1600      0.0960 ]
   ss    4      [      6.2500      6.0100      2.5000      1.0000      0.4000      0.2400 ]
   ss    5      [     15.6250     15.0250      6.2500      2.5000      1.0000      0.6000 ]
   ss    6      [     26.0417     25.0417     10.4167      4.1667      1.6667      1.0000 ]
```

Censorovany subretezec

Uvazujme podretezec sestaveny jen z vyskytu puvodniho ergodickeho retezce v mnozine stavu

```
   A =          [   2   6 ]
```

Jeho matice pravdepodobnosti prechodu PPCensMat ma radky

```
   ss    2      [      0.9616      0.0384 ]
   ss    6      [      0.9616      0.0384 ]
```

a jeho stacionarni rozdeleni PiCensVec je

```
   PiCensVec =  [      0.9616      0.0384 ]
```

Vektor MuCensVec strednich dob jeho prvniho navratu do jednotlivych stavu z A je

```
   MuCensVec =  [      1.0399     26.0417 ]
```

a stredni pocet jeho navstev sloupcoveho stavu mezi dvema bezprostredne nasledujicimi pruchody radkovym stavem lze vycist z matice:

```
   ss    2      [      1.0000      0.0399 ]
   ss    6      [     25.0417      1.0000 ]
```

Stredni vynosy

Podminene stredni vynosy za prvnich n obdobi (i-ta slozka odpovida startu ze stavu i)

```
   n =   1 :    [      1.1480      0.2500      1.1880      1.2280      1.1220      0.2500 ]
   n =   2 :    [      1.7732      1.3980      1.8292      1.8268      1.3720      1.3980 ]
   n =   3 :    [      2.7185      2.0232      2.7575      2.6156      2.5200      2.0232 ]
   n =   4 :    [      3.4649      2.9685      3.4482      3.4499      3.1452      2.9685 ]
   n =   5 :    [      4.3084      3.7149      4.3491      4.2672      4.0905      3.7149 ]
   n =   6 :    [      5.1166      4.5584      5.1238      5.0931      4.8369      4.5584 ]
   n =   7 :    [      5.9325      5.3666      5.9603      5.8978      5.6804      5.3666 ]
   n =   8 :    [      6.7521      6.1825      6.7671      6.7201      6.4886      6.1825 ]
   n =   9 :    [      7.5643      7.0021      7.5856      7.5330      7.3045      7.0021 ]
   n =  10 :    [      8.3835      7.8143      8.4024      8.3510      8.1241      7.8143 ]
```

```
Absolutni stredni vynosy za prvnich n obdobi pri danem pocatecnim rozdeleni

   n =   1 :    [      1.1480 ]
   n =   2 :    [      1.7732 ]
   n =   3 :    [      2.7185 ]
   n =   4 :    [      3.4649 ]
   n =   5 :    [      4.3084 ]
   n =   6 :    [      5.1166 ]
   n =   7 :    [      5.9325 ]
   n =   8 :    [      6.7521 ]
   n =   9 :    [      7.5643 ]
   n =  10 :    [      8.3835 ]

Pro velke n lze pro podminene stredni vynosy za n obdobi pouzit aproximaci AVec*n + BVec, kde

   AVec =       [      0.8161       0.8161      0.8161      0.8161      0.8161      0.8161 ]
   BVec =       [      0.2211      -0.3450      0.2405      0.1892     -0.0392     -0.3450 ]

a AVec tak obsahuje limitni podminene prumerne vynosy za jedno obdobi.
Pro absolutni stredni vynosy za n obdobi pak lze pouzit aproximaci An + B, kde

   A =                 0.8161
   B =                 0.2211

a A tak obsahuje limitni absolutni prumerny vynos za jedno obdobi.
```

```
------------
Zadani ulohy
------------

Matice pravdepodobnosti prechodu PPMat s radky:

   ss    1      [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    2      [      0.0000      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3      [      0.0000      0.6000      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000 ]
   ss    4      [      0.0000      0.6000      0.0000      0.0000      0.4000      0.0000 ]
   ss    5      [      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000      0.6000 ]
   ss    6      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      1.0000 ]

Vektor pocatecniho rozdeleni PRCol:

   PRCol =      [      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]

Matice oceneni prechodu ZMat s radky:

   ss    1      [      0.0000      1.0800      1.2500      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    2      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3      [      0.0000      1.0800      0.0000      1.3500      0.0000      0.0000 ]
   ss    4      [      0.0000      1.0800      0.0000      0.0000      1.4500      0.0000 ]
   ss    5      [      0.0000      1.0800      0.0000      0.0000      0.0000      1.1500 ]
   ss    6      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]

Diskontni faktor Beta:

   Beta =       [      1.0000 ]

Vektor CensVec stavu censorovaneho retezce:

   CensVec  =   [   2   6 ]

Maximalni rad pocitanych pravdepodobnosti:

   NPPN     =   [   4 ]

Maximalni uvazovana hodnota doby prvniho navratu:

   NFFN     =   [   4 ]

Maximalni pocet obdobi uvazovany pri pocitani vynosu:

   MaxNV    =   [   6 ]

Vystup: do souboru MRWithAbsorption.txt



--------------------------------------
Pravdepodobnosti prechodu vyssich radu
--------------------------------------

Matice pravdepodobnosti prechodu radu 2:

   ss    1      [      0.0000      0.8400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   ss    2      [      0.0000      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3      [      0.0000      0.8400      0.0000      0.0000      0.1600      0.0000 ]
   ss    4      [      0.0000      0.7600      0.0000      0.0000      0.0000      0.2400 ]
   ss    5      [      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000      0.6000 ]
   ss    6      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      1.0000 ]

Matice pravdepodobnosti prechodu radu 3:

   ss    1      [      0.0000      0.9360      0.0000      0.0000      0.0640      0.0000 ]
   ss    2      [      0.0000      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3      [      0.0000      0.9040      0.0000      0.0000      0.0000      0.0960 ]
   ss    4      [      0.0000      0.7600      0.0000      0.0000      0.0000      0.2400 ]
   ss    5      [      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000      0.6000 ]
   ss    6      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      1.0000 ]

Matice pravdepodobnosti prechodu radu 4:

   ss    1      [      0.0000      0.9616      0.0000      0.0000      0.0000      0.0384 ]
   ss    2      [      0.0000      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3      [      0.0000      0.9040      0.0000      0.0000      0.0000      0.0960 ]
   ss    4      [      0.0000      0.7600      0.0000      0.0000      0.0000      0.2400 ]
   ss    5      [      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000      0.6000 ]
   ss    6      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      1.0000 ]

---------------------------------------
Absolutni pravdepodobnosti vyssich radu
---------------------------------------

Absolutni pravdepodobnosti radu n < 5:

   n =   1      [      0.0000      0.6000      0.4000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
```

```
   n =   2      [      0.0000      0.8400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   n =   3      [      0.0000      0.9360      0.0000      0.0000      0.0640      0.0000 ]
   n =   4      [      0.0000      0.9616      0.0000      0.0000      0.0000      0.0384 ]
```

Rozdeleni doby prvniho navratu

Podminene pravdepodobnosti prvniho navratu za dobu 2:

```
   ss    1      [      0.0000      0.2400      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000 ]
   ss    2      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3      [      0.0000      0.2400      0.0000      0.0000      0.1600      0.0000 ]
   ss    4      [      0.0000      0.1600      0.0000      0.0000      0.0000      0.2400 ]
   ss    5      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    6      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
```

Podminene pravdepodobnosti prvniho navratu za dobu 3:

```
   ss    1      [      0.0000      0.0960      0.0000      0.0000      0.0640      0.0000 ]
   ss    2      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3      [      0.0000      0.0640      0.0000      0.0000      0.0000      0.0960 ]
   ss    4      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    5      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    6      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
```

Podminene pravdepodobnosti prvniho navratu za dobu 4:

```
   ss    1      [      0.0000      0.0256      0.0000      0.0000      0.0000      0.0384 ]
   ss    2      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    4      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    5      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    6      [      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
```

Klasifikace stavu

Mnozina stavu daneho markovskeho retezce obsahuje nasledujici komunikacni tridy:

```
   Uzavrena ( pocet stavu   1 s periodou   1 ) : [   2 ]
   Uzavrena ( pocet stavu   1 s periodou   1 ) : [   6 ]
   Otevrena ( pocet stavu   1 s periodou   0 ) : [   1 ]
   Otevrena ( pocet stavu   1 s periodou   0 ) : [   3 ]
   Otevrena ( pocet stavu   1 s periodou   0 ) : [   4 ]
   Otevrena ( pocet stavu   1 s periodou   0 ) : [   5 ]
```

takze pocet uzavrenych (resp. otevrenych) trid je 2 (resp. 4).
Kazdy stav lezi v nektere z techto trid.

Pro permutaci stavu:

```
                [   2   6   1   3   4   5 ]
```

tak ziskame kanonicky tvar matice pravdepodobnosti prechodu s radky:

```
   ss    2      [      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    6      [      0.0000      1.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
   ss    1      [      0.6000      0.0000      0.0000      0.4000      0.0000      0.0000 ]
   ss    3      [      0.6000      0.0000      0.0000      0.0000      0.4000      0.0000 ]
   ss    4      [      0.6000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000      0.4000 ]
   ss    5      [      0.4000      0.6000      0.0000      0.0000      0.0000      0.0000 ]
```

Absorpce trvalymi stavy

Fundamentalni matice ma radky:

```
   ss    1      [      1.0000      0.4000      0.1600      0.0640 ]
   ss    3      [      0.0000      1.0000      0.4000      0.1600 ]
   ss    4      [      0.0000      0.0000      1.0000      0.4000 ]
   ss    5      [      0.0000      0.0000      0.0000      1.0000 ]
```

ktere odpovidaji prechodnym stavum ve vzestupnem poradi (stejne jako sloupce). Jeji prvky lze interpretovat jako stredni pocet casovych okamziku stravenych retezcem ve sloupcovem stavu pri startu z radkoveho stavu.

Podmineny vektor stredniho poctu casovych okamziku stravenych v mnozine prechodnych stavu je

```
                [      1.6240      1.5600      1.4000      1.0000 ]
```

a jeho i-ta slozka odpovida startu z i-teho prechodneho stavu (ve vzestupnem poradi).

Pri danem pocatecnim rozdeleni pak absolutni stredni pocet W casovych okamziku stravenych v mnozine prechodnych stavu je:

```
   W =                1.6240
```

Matice absorpcnich pravdepodobnosti ma radky:

```
   ss    1      [      0.9616      0.0384 ]
   ss    3      [      0.9040      0.0960 ]
   ss    4      [      0.7600      0.2400 ]
   ss    5      [      0.4000      0.6000 ]
```

ktere odpovidaji prechodnym stavum ve vzestupnem poradi (zatimco sloupce odpovidaji vzestupne usporadanym stavum trvalym). Jeji prvky vyjadruji pravdepodobnost absorpce ve sloupcovem stavu pri startu z radkoveho stavu.

```
---------------------
Stacionarni rozdeleni
---------------------

--------------
Stredni vynosy
--------------
```

Podminene stredni vynosy za prvnich n obdobi (i-ta slozka odpovida startu ze stavu i)

```
   n =   1 :    [      1.1480      0.0000      1.1880      1.2280      1.1220      0.0000 ]
   n =   2 :    [      1.6232      0.0000      1.6792      1.6768      1.1220      0.0000 ]
   n =   3 :    [      1.8197      0.0000      1.8587      1.6768      1.1220      0.0000 ]
   n =   4 :    [      1.8915      0.0000      1.8587      1.6768      1.1220      0.0000 ]
   n =   5 :    [      1.8915      0.0000      1.8587      1.6768      1.1220      0.0000 ]
   n =   6 :    [      1.8915      0.0000      1.8587      1.6768      1.1220      0.0000 ]
```

Absolutni stredni vynosy za prvnich n obdobi pri danem pocatecnim rozdeleni

```
   n =   1 :    [      1.1480 ]
   n =   2 :    [      1.6232 ]
   n =   3 :    [      1.8197 ]
   n =   4 :    [      1.8915 ]
   n =   5 :    [      1.8915 ]
   n =   6 :    [      1.8915 ]
```